УДК 512.541

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ КАК АРТИНОВЫ ИЛИ НЕТЕРОВЫ МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ. Ч. 3

П.А. Крылов*, Е.И. Подберезина

*Томский государственный университет
Томский политехнический университет
E-mail: hggh45de@mail2000.ru

Описаны абелевы группы A и B такие, что группа гомоморфизмов Hom(A,B) является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы B. Описание групп A и B, для которых группа Hom(A,B) является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы A, сведена к случаю, когда группа A не имеет кручения, а группа B – либо квазициклическая группа, либо делимая группа без кручения. Охарактеризованы абелевы группы A и B, для которых группа Hom(A,B) есть нётеров модуль над кольцом E(A) или E(B). Исследование произвольной абелевой группы с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов сведено к исследованию группы без кручения с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов. Исследование группы с нётеровым справа кольцом эндоморфизмов осталось незавершённым. Описаны сепарабельные абелевы группы без кручения с нётеровыми слева или справа кольцами эндоморфизмов.

Проблема описания групп A и B таких, что $E(B)$-модуль Hom(A,B) нётеров, в определённом смысле сведена к случаям циклической группы A простого порядка и групп A и B без кручения (теорема 5 [1. С. 69]).

Предложение 9. Если $E(B)$-модуль Hom(A,B) нётеров, то

$$\overline{A} = H \oplus \sum_{n}{}^{\oplus} Q \oplus \sum_{j=1}^{m}{}^{\oplus} Z(p_j^{\infty}) \oplus G,$$

где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения, $n,m \in N$,

$$S = C \oplus \sum_{\eta}{}^{\oplus} Q \oplus \sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} \sum_{\eta_i}{}^{\oplus} Z(p_j^{\infty}) \oplus G',$$

где C – ограниченная, G' – редуцированная группа без кручения, $k \in N$, η, η_i – некоторые кардиналы.

Отметим большое значение следствия 27.3 из [2] для доказательства этого предложения. Из предложения 9 вытекает, что нётеровость изучаемого модуля эквивалентна нётеровости следующих четырёх $E(B)$-модулей: Hom(H,B), Hom$(Z(p^\infty),B)$, Hom(G,B), Hom(Q,B), где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения.

Предложения 10, 11 дают ответ на вопрос: когда $E(B)$-модуль Hom(Q,B) нётеров?

Предложение 10. Пусть $\sum_{\eta}^{\oplus} Z(p^\infty)$ – делимая p-компонента группы B. Тогда $E(B)$-модуль Hom$(Q,\sum_{\eta}^{\oplus} Z(p^\infty))$ не нётеров.

Предложение 11. Допустим, что группа B не содержит квазициклических групп. Тогда $E(B)$-модуль Hom$(Q,\sum_{\eta}^{\oplus} Q)$ нётеров.

В предложении 12 установлена нётеровость $E(B)$-модуля Hom$(Z(p^\infty),B)$.

Предложение 12. Пусть $\sum_{\eta}^{\oplus} Z(p^\infty)$ – делимая часть p-компоненты группы B. Тогда $E(B)$-модуль Hom$(Z(p^\infty),\sum_{\eta}^{\oplus} Z(p^\infty))$ нётеров.

Интересно доказательство этого предложения: построена убывающая цепочка его подмодулей и доказано, что других собственных подмодулей у этого модуля нет.

Что касается $E(B)$-модуля Hom(H,B), то его нётеровость, понятно, равносильна нётеровости $E(B)$-модулей вида Hom$(Z(p^k),B)$ для чисел p, относящихся к группе H (напомним, что H – конечная группа). Нётеровость же $E(B)$-модулей такого вида равносильна нётеровости $E(B)$-модуля Hom$(Z(p),B)$ согласно предложению 13.

Предложение 13. $E(B)$-модуль Hom$(Z(p^k),B)$ нётеров тогда и только тогда, когда нётеров модуль Hom$(Z(p),B)$.

Известно, что справедлив канонический изоморфизм $E(B)$-модулей:

$$\text{Hom}(Z(p),B) \cong B[p].$$

Следовательно, в связи с изучением $E(B)$-модуля Hom$(Z(p),B)$ возникает задача о нётеровости нижнего слоя $B[p]$ как $E(B)$-модуля. Иными словами, когда всякая возрастающая цепь вполне характери-

стических подгрупп группы B, лежащих в $B[p]$, стабилизируется?

Предложение 14. Пусть D_p – делимая p-компонента группы B, G – редуцированная группа без кручения. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(G, D_p)$ не нётеров.

Этот факт используется при изучении смешанной группы с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов.

Теорема 5 является основным результатом исследования групп A и B таких, что $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров.

Теорема 5. Пусть A и B – группы. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров тогда и только тогда, когда

$$\overline{A} = H \oplus \sum_{n}{}^{\oplus} Q \oplus \sum_{j=1}^{m}{}^{\oplus} Z(p_j^{\infty}) \oplus G,$$

где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения, $n,m \in N$,

$$S = C \oplus \sum_{\eta}{}^{\oplus} Q \oplus \sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} D_{p_i} \oplus G',$$

где C – ограниченная группа, D_{p_i} – делимая p_i-компонента группы S, G' – редуцированная группа без кручения, $k \in N$, η – некоторый кардинал; для любого p, относящегося к группе H, $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(Z(p),B)$ нётеров, причём:

а) если $k \neq 0$, то

$$\overline{A} = H \oplus \sum_{j=1}^{m}{}^{\oplus} Z(p_j^{\infty}), \quad S = C \oplus \sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} D_{p_i};$$

б) если $k=0$, но $\eta \neq 0$, то

$$\overline{A} = H \oplus \sum_{n}{}^{\oplus} Q \oplus G, \quad S = C \oplus \sum_{\eta}{}^{\oplus} Q \oplus G',$$

где $r(G)<\infty$ и $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(G,S/M)$ нётеров, где $M = C \oplus \sum_{\eta}^{\oplus} Q$;

в) если $k=\eta=0$, то

$$\overline{A} = H \oplus G, \; S = C \oplus G',$$

для любого p, относящегося к группе S, $r_p(G)<\infty$ и $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(G,S/C)$ нётеров.

Основная идея её доказательства та же, что и теоремы 3: построение индуцированных точных последовательностей $E(B)$-модулей. Доказательство необходимости теоремы 5 также опирается на предложения 9, 13. Если обе группы A и B не имеют кручения, то в вопросе о нётеровости $E(B)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$ можно лишь надеяться на некоторые частичные результаты.

Приведём некоторые следствия теоремы 5.

Следствие 14. Пусть A и B – периодические группы. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров тогда и только тогда, когда

$$\overline{A} = H \oplus \sum_{j=1}^{m}{}^{\oplus} Z(p_j^{\infty}), \quad S = C \oplus \sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} D_{p_i},$$

где $m,k \in N$, H – конечная группа, C – ограниченная группа, D_{p_i} – делимая p_i-компонента группы S, для любого p, относящегося к группе H, $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(Z(p),B)$ нётеров.

Следствие 15. Пусть A и B – делимые группы. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров тогда и только тогда, когда группы $\overline{A}$ и S либо обе периодические, либо обе не имеют кручения, причём:

в первом случае

$$\overline{A} = \sum_{j=1}^{m}{}^{\oplus} Z(p_j^{\infty}), \quad S = \sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} D_{p_i};$$

во втором случае

$$\overline{A} = \sum_{n}{}^{\oplus} Q, \quad S = \sum_{\eta}{}^{\oplus} Q,$$

где $m,n,k \in N$, η – некоторый кардинал.

Следующие три следствия вытекают из предложения 14 и теоремы 5.

Следствие 16. Пусть A – редуцированная группа без кручения, B – периодическая группа. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров тогда и только тогда, когда след S есть ограниченная группа и для любого p, относящегося к группе A, $r_p(A)<\infty$.

Следствие 17. Пусть A – редуцированная группа без кручения, B – делимая группа. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров тогда и только тогда, когда след S не имеет кручения и $r(A)<\infty$.

Следствие 18. Пусть A – редуцированная группа без кручения, а группа B такова, что её часть без кручения является делимой группой. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров тогда и только тогда, когда след S равен прямой сумме ограниченной группы и делимой группы без кручения, причём: а) если след S содержит хотя бы одну группу Q, то $r(A)<\infty$; б) если след S – ограниченная группа, то для любого p, относящегося к группе S, $r_p(A)<\infty$.

Из теорем 3 и 5 можно вывести условия, при которых $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов и нётеров одновременно.

Следствие 19. Пусть A и B – периодические группы. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов и нётеров тогда и только тогда, когда след S есть ограниченная группа, причём для любого p, относящегося к группе S, редуцированная p-компонента группы B ограничена. Группа $\overline{A}$ является конечной и для любого p, относящегося к группе $\overline{A}$, $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(Z(p),B)$ нётеров.

Следствие 20. Пусть A и B – делимые группы. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов и нётеров тогда и только тогда, когда группы $\overline{A}$ и S не имеют кручения, причём ранг группы $\overline{A}$ конечен.

Следствие 21. Пусть A – редуцированная группа без кручения, B – периодическая группа. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов и нётеров тогда и только тогда, когда след S является ограниченной группой; для любого p, относящегося к группе S, редуцированная p-компонента группы B ограничена и для любого p, относящегося к группе S, $r_p(A)<\infty$.

Следствие 22. Пусть A – редуцированная группа без кручения, B – делимая группа. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов и нётеров тогда и только тогда, когда след S не имеет кручения и ранг группы A конечен.

Следствие 23. Пусть A – редуцированная группа без кручения, а группа B такова, что её часть без кручения является делимой группой. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов и нётеров тогда и только тогда, когда след S равен прямой сумме ограниченной группы и делимой группы без кручения; для любого p, относящегося к группе S, редуцированная p-компонента группы B ограничена, причём: а) если след S содержит хотя бы одну группу Q, то $r(A)<\infty$, б) если след S является ограниченной группой, то для любого p, относящегося к группе S, $r_p(A)<\infty$.

Описание групп A и B, таких, что $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров, сведено к случаям группы A с неограниченной p-компонентой хотя бы для одного p, относящегося к следу группы A в группе B и групп без кручения A и B (теорема 49 [3. С. 69]).

Теорема 6. Пусть A и B – некоторые группы и пусть редуцированная p-компонента группы A ограничена для любого p, относящегося к следу S группы A в группе B. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров тогда и только тогда, когда

$$\overline{A}=\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus}D_{p_i}\oplus\sum_{\eta}{}^{\oplus}Q\oplus C\oplus G,$$

$$S=\sum_{j=1}^{n}{}^{\oplus}Z(p_j^{\infty})\oplus\sum_{m}{}^{\oplus}Q\oplus H\oplus G',$$

где $n,m\in N$, η – некоторый кардинал, D_{p_i} – делимая p_i-компонента группы A, C – ограниченная группа, H – конечная группа, G и G' – редуцированные группы без кручения, причём:

а) если $n\neq 0$, то

$$\overline{A}=\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus}D_{p_i}\oplus C\oplus G,$$

$$S=\sum_{j=1}^{n}{}^{\oplus}Z(p_j^{\infty})\oplus\sum_{m}{}^{\oplus}Q\oplus H\oplus G',$$

и $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(\overline{A}/M,S)$, где $M=\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus}D_{p_i}\oplus C$, нётеров;

б) если $n=0$, но $m\neq 0$, то

$$\overline{A}=\sum_{\eta}{}^{\oplus}Q\oplus C\oplus G,$$

$$S=\sum_{m}{}^{\oplus}Q\oplus H\oplus G',$$

и $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(\overline{A}/L,S)$, где $L=\sum_{\eta}{}^{\oplus}Q\oplus C$, нётеров;

в) если $n=m=0$, или

$$S=H\oplus G', \text{ то}$$
$$\overline{A}=C\oplus G$$

и $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(\overline{A}/C,S)$ нётеров.

Доказательство теоремы 6, которая относится к основным результатам работы, опирается на построение индуцированных точных последовательностей $E(A)$-модулей, теорему 1 и следующие предложения.

Предложение 15. Пусть $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров. Тогда группа S есть прямая сумма конечного числа слагаемых:

$$S=\sum_{j=1}^{n}{}^{\oplus}Z(p_j^{\infty})\oplus\sum_{m}{}^{\oplus}Q\oplus H\oplus G',$$

где $n,m\in N$, H – конечная группа, G' – редуцированная группа без кручения.

Предложение 15 даёт информацию о строении следа группы A в группе B для нётерова $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$. Подчеркнём значительную роль следствия 27.3 из книги [2] в его доказательстве. Из предложения 15 (если учесть вид некоторых подмодулей $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$) вытекает, что нётеровость $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$ равносильна нётеровости следующих его подмодулей: $\mathrm{Hom}(A,Z(p^k))$, $\mathrm{Hom}(A,Q)$, $\mathrm{Hom}(A,Z(p^{\infty}))$, $\mathrm{Hom}(A,G')$, где G' – редуцированная группа без кручения. Кроме того, зная строение следа группы A в группе B, легко сделать вывод о строении коследа группы B в группе A.

Предложение 16. Пусть D_p – делимая p-компонента группы A. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(D_p,Z(p^{\infty}))$ нётеров.

Интересна идея доказательства предложения 16: выписана убывающая последовательность подмодулей $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(D_p,Z(p^{\infty}))$, существованием которой ранее была обоснована неартиновость этого модуля, и показано, что других собственных подмодулей у этого модуля нет.

Предложение 17. Пусть $V=\sum_{\eta}{}^{\oplus}Q$, где η – некоторый кардинал. $E(V)$-модуль $\mathrm{Hom}(V,Z(p^{\infty}))$ не нётеров и не артинов.

Предложение 18. Пусть след S группы A в группе B содержит хотя бы одну квазициклическую группу, $\sum_{\eta}{}^{\oplus}Q$ – делимая часть без кручения группы A, η – некоторый кардинал, D_p – делимая p-компонента группы A и $D=D_p\oplus\sum_{\eta}{}^{\oplus}Q$. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(D,Z(p^{\infty}))$ не нётеров и не артинов.

Предложение 19. Пусть D – делимая часть группы A, D_p – периодическая часть группы D, то есть $D=D_p\oplus\sum_{\eta}{}^{\oplus}Q$ для некоторго кардинала η. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(D,Q)$ нётеров и артинов.

Приведём следствие теоремы 6.

Следствие 24. Пусть A и B – делимые группы. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров тогда и только тогда, когда след S группы A в группе B является делимой группой конечного ранга, причём:

а) если след S содержит квазициклическую группу, то $\overline{A}$ является периодической группой с конечным числом p-компонент;

б) если след S не содержит квазициклическую группу, то $\overline{A}$ есть группа без кручения.

Следствие 25. Пусть A и B – периодические группы и пусть редуцированная p-компонента группы A ограничена для любого p, относящегося к следу S. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ нётеров тогда и только тогда, когда след S равен прямой сумме конечной группы и делимой периодической группы конечного ранга, а $\overline{A}$ есть прямая сумма ограниченной группы и делимой периодической группы с конечным числом p-компонент.

Из теоремы 6 и следствия 15 вытекает следствие.

Следствие 26. Пусть A и B – делимые группы. Группа $\mathrm{Hom}(A,B)$ является нётеровым $E(A)$-модулем и нётеровым $E(B)$-модулем тогда и только тогда, когда группы $\bar{A}$ и S имеют конечный ранг, причём либо они обе периодические, либо обе без кручения.

Следующее следствие вытекает из теоремы 6 и следствия 14.

Следствие 27. Пусть A и B – периодические группы и редуцированная p-компонента группы A ограничена для любого p, относящегося к следу S. Группа $\mathrm{Hom}(A,B)$ является нётеровым $E(A)$-модулем и одновременно нётеровым $E(B)$-модулем тогда и только тогда, когда группы $\bar{A}$ и S равны прямой сумме конечной группы и делимой периодической группы конечного ранга (ранги групп $\bar{A}$ и S конечны, но совпадать не обязаны) и для любого p, относящегося к редуцированной части группы $\bar{A}$, нетеровым является $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(Z(p),B)$.

Приведём следствия теорем 6 и 4.

Следствие 28. Пусть A и B – делимые группы. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов и нётеров тогда и только тогда, когда группы $\bar{A}$ и S не имеют кручения и ранг группы S конечен.

Следствие 29. Пусть A и B – периодические группы. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов и нётеров тогда и только тогда, когда след S равен прямой сумме конечной группы и делимой периодической группы конечного ранга, группа $\bar{A}$ является ограниченной и для любого p, относящегося к группе B, редуцированная p-компонента группы A ограничена.

Следствие 30. Пусть группы A и B таковы, что их части без кручения являются делимыми группами. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов и нётеров тогда и только тогда, когда для любого p, относящегося к группе B, редуцированная p-компонента группы A ограничена; след S равен прямой сумме конечной группы и делимой группы конечного ранга, причём:

а) если группа S содержит квазициклическую группу, то она является периодической, а группа $\bar{A}$ является ограниченной;

б) если группа S не содержит квазициклическую группу, но содержит конечное число копий группы Q, то она равна прямой сумме конечной группы и делимой группы без кручения конечного ранга, а группа $\bar{A}$ есть прямая сумма ограниченной группы и делимой группы без кручения;

в) если же след S есть конечная группа, то группа $\bar{A}$ является ограниченной.

Известно строение произвольных абелевых групп с артиновыми кольцами эндоморфизмов. Кольцо эндоморфизмов $E(A)$ группы A артиново слева (или справа) тогда и только тогда, когда $A=B\oplus D$, где B – конечная группа, D – делимая группа без кручения конечного ранга (теорема 111.3 из [4]). Описаны также периодические абелевы группы с нётеровыми справа (или слева) кольцами эндоморфизмов. Кольцо $E(A)$ периодической группы A нётерово справа (или слева) тогда и только тогда, когда A – прямая сумма конечного числа коциклических групп (предложение 111.4 из [4]). Напомним, что коциклическая группа – это или циклическая p-группа, или квазициклическая группа. В противоположность условию минимальности условие максимальности, наложенное на кольцо эндоморфизмов, не слишком ограничивает групповую структуру.

Лемма 6. Пусть A – смешанная абелева группа с нётеровым кольцом эндоморфизмов. Тогда $A=T\oplus G$, где T – прямая сумма конечного числа коциклических групп, G – группа без кручения.

Из этой леммы вытекает, что если кольцо эндоморфизмов смешанной группы A нётерово, то его можно представить кольцом матриц:

$$E(A)\cong\begin{pmatrix} E(T) & \mathrm{Hom}(G,T) \\ 0 & E(G) \end{pmatrix},$$

где G и T – такие группы, как в лемме 6. Согласно упр. 6 [5. С. 165] такое кольцо матриц нётерово слева (соответственно справа) тогда и только тогда, когда кольца $E(T)$ и $E(G)$ нётеровы слева (соответственно справа) и $E(T)$-модуль $\mathrm{Hom}(G,T)$ нётеров (соответственно $E(G)$-модуль $\mathrm{Hom}(G,T)$ нётеров).

Таким образом, изучение группы A с нётеровым кольцом эндоморфизмов $E(A)$ тесно связано с изучением нётерова модуля $\mathrm{Hom}(G,T)$ над кольцами эндоморфизмов групп G и T, где группы G и T такие, как в лемме 6.

Исследование произвольных абелевых групп с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов удалось полностью свести к исследованию групп без кручения с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов [6].

Предложение 20. Пусть G – группа без кручения, T – прямая сумма конечного числа коциклических групп. $E(T)$-модуль $\mathrm{Hom}(G,T)$ нётеров тогда и только тогда, когда T – редуцированная группа и для любого p, относящегося к T, $r_p(G)$ конечен.

Теорема 7. Пусть A – смешанная группа. Кольцо $E(A)$ нётерово слева тогда и только тогда, когда $A=T\oplus G$, где T – конечная группа, G – группа без кручения такая, что кольцо $E(G)$ нётерово слева и для любого p, относящегося к T, $r_p(G)$ конечен.

Исследование смешанных групп с нётеровыми справа кольцами эндоморфизмов осталось незавершённым; свести их изучение к изучению групп без кручения с нётеровыми справа кольцами эндоморфизмов не удалось. Это связано с тем, что не удалось в общем случае ответить на вопрос о нётеровости правого $E(G)$-модуля $\mathrm{Hom}(G,T)$, где G – редуцированная группа без кручения, T – прямая сумма конечного числа коциклических групп. Ответ получен при некоторых ограничениях на группу G ([6]).

Предложение 21. Пусть G – группа без кручения, p – простое число, D – делимая p-группа. Если G – либо не p-делимая группа, либо G – p-делимая группа и кольцо $E(G)$ счётно, то $E(G)$-модуль $\mathrm{Hom}(G,D)$ не является нётеровым.

Предложение 22. Пусть G – группа без кручения, T – конечная группа. Если $r_p(G)$ конечен для каждого p, относящегося к группе T, то $E(G)$-модуль $\mathrm{Hom}(G,T)$ нётеров.

Предложения 21 и 22 позволяют сделать некоторые выводы о строении смешанных групп с нётеровыми справа кольцами эндоморфизмов.

Следствие 31. Пусть группа $A=T\oplus G$, где G – группа без кручения с нётеровым справа кольцом $E(G)$, T – конечная группа, причём $r_p(G)$ конечен для всякого p, относящегося к группе T. Тогда кольцо $E(A)$ нётерово справа.

Следствие 32. Пусть группа $A=T\oplus G$, где G – группа без кручения со счётным кольцом $E(G)$ (например, группа G имеет конечный ранг), T – прямая сумма конечного числа коциклических групп. Если кольцо $E(A)$ нётерово справа, то T – редуцированная группа (или, что здесь равносильно, T – конечная группа).

Следствие 33. Пусть A – смешанная группа конечного ранга без кручения. Кольцо $E(A)$ нётерово справа в том и только в том случае, когда $A=T\oplus G$, где G – группа без кручения конечного ранга с нётеровым справа кольцом $E(G)$, T – конечная группа.

Напомним, что группа без кручения A называется сепарабельной, если каждое конечное подмножество элементов из A содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы A.

Получено исчерпывающее описание сепарабельных абелевых групп без кручения с нётеровыми слева или справа кольцами эндоморфизмов [7].

Теорема 8. Кольцо эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения G нётерово справа тогда и только тогда, когда G является вполне разложимой группой конечного ранга и типы её однородных компонент попарно несравнимы.

Теорема 9. Пусть G – сепарабельная группа без кручения. Кольцо $E(G)$ нётерово слева тогда и только тогда, когда группа G является вполне разложимой группой конечного ранга и типы её различных однородных компонент или несравнимы, или сравнимы за счёт бесконечностей.

Это описание существенно опирается на исследование группы $\mathrm{Hom}(A,B)$, где A и B – группы без кручения ранга 1, как нётерового $E(B)$-модуля или $E(A)$-модуля.

Приведём следствия теорем 8 и 9.

Следствие 34. Кольцо эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения конечного ранга, типы всех прямых слагаемых ранга 1 которой идемпотентны, нётерово слева.

Следствие 35. Если кольцо эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения нётерово справа, то оно нётерово слева.

Из теоремы 8 и следствия 34 вытекает хорошо известный факт, что кольцо эндоморфизмов группы $Z\oplus Q$, изоморфное кольцу матриц

$$\begin{pmatrix} Z & 0 \\ Q & Q \end{pmatrix},$$

нётерово слева, но не нётерово справа. То же верно для групп $Q_p\oplus Q$, $Z\oplus Q_p$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подберезина Е.И. Группа Hom(A,B) как нётеров модуль над кольцом эндоморфизмов группы B // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. – Вып. 15. – С. 190–199.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М .: Мир, 1974. – Т. 1. – 335 с.
3. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Группа Hom(A,B) как нётеров модуль над кольцом эндоморфизмов группы B // Исследования по математическому анализу и алгебре / Под ред. член-корр. РАО, проф. И.А. Александрова, проф. П.А. Крылова. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. – С. 63–76.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.
5. Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
6. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Строение смешанных абелевых групп с нетеровыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1994. – Вып. 11–12. – С. 121–129.
7. Подберезина Е.И. Строение сепарабельных абелевых групп без кручения с нётеровыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. – Вып. 9. – С. 77–83.